جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2014 - 2015 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعة ونصف العلامة: 100 درجة الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة {1, 2, 3} زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 5 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_5(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.

(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q^*, \cdot)$ غير منتهية كون Q^* زمرة غير منتهية.

(4) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(5) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولد واحد فقط .

(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^9 في G تساوي 10.

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(11)$ يساوي 11 زمر جزئية.

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 5 .

(9) إذا كان $\varphi: Z_{30} \to Z_{30}$ تشاكلا وكان $Ker\ \varphi = \{0, 10, 20\}$ و $\varphi(23) = 6$ فإن $\varphi^{-1}(6) = 23 \cdot ker\ \varphi$.

(10) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 5.

(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 20 .

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_4(20)$ يساوي 5 .

(13) رتبة العنصر (2 , 3) من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6 .

(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(12)$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $G , G`$ زمرتين ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $H = \{ x: x \in G; x^2 = e \}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كانت $G = <a>$ دوارة وكان التطبيق $\varphi : Z \to G$ المعرف على النحو: $\varphi(n) = a^n$ متباينا فإن G تكون غير منتهية.

(3) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن $a . b = b . a$.

(4) إذا كانت G منتهية مرتبتها pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان ، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(5) إذا كان $f: G \to G`$ تشاكلا زمرياً و $g \in G$ حيث $f(g) = g`$ ، فإن

$$f^{-1}(g`) = \{ x : x \in G, f(x) = g` \} = g . Ker f$$

السؤال الثالث (28 درجة): لتكن $(G , .)$ زمرة ما و A, B زمرتين جزئيتين من G. أثبت مايلي:

(1) إذا كانت كلا من الزمرتين A, B ناظمية في G ، فإن الجداء $A \cdot B$ هو زمرة ناظمية في G.

(2) كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

(3) إذا كان p عدداً أولياً. عرف الـ P- زمرة جزئية سيلوفية في الزمرة G. ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 40.

2015 – 1 – 20

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إياد [illegible]

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية /1/ د. إيمان الخوجة
سنة ثانية رياضيات
الدورة الأولى لعام 2014 - 2015

الجواب الأول [42 درجة] لكل بند 3 درجات

1) خطأ، العملية (.) ليست داخلية.
2) خطأ، يساوي 4.
3) خطأ، $o(-1) = 2$.
4) خطأ، 9 مولدلها وليس أولي.
5) خطأ، تملك مولدين.
6) خطأ، يساوي 5.
7) خطأ، يساوي 4.
8) صح.
9) خطأ، $\varphi^{-1}(6) = 23 + \ker f$
10) خطأ، يساوي 10.
11) خطأ، لأن $d(5,20) \neq 1$
12) خطأ، يساوي 4.
13) خطأ، يساوي 12.
14) صح.

الجواب الثاني [30 درجة] لكل بند 6 درجات

1) بما أن $e^2 = e$ فإن $e \in H$ ومنه $H \neq \phi$. ليكن $x, y \in H$ عندئذ

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1}) = x^2(y^2)^{-1} = ee^{-1} = e \Rightarrow xy^{-1} \in H$$

أي H زمرة جزئية من G.

حل الدورة الأولى 2015 - 2016

بنى جبرية 1

1- خطأ العملية (.) ليست داخلية

أي {1,2,3,4} لأنه

mod 5	1	2	3
1	1	2	3
2	2	(4)	1
3	3	2	4

2- خطأ (2)

$U_{20} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

$U_5(20) = \{1, 11\}$

3. خطأ $O(-1) = 2$

4- خطأ (و) يولد جميع عناصرها وهو غير دوري

5- خطأ تقبل مولدين a, a^{-1}

6- خطأ يساوي 5

7- خطأ يساوي 4 $U_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

8- صح

9- خطأ $u^{-1}(6) = 23 + \ker f$

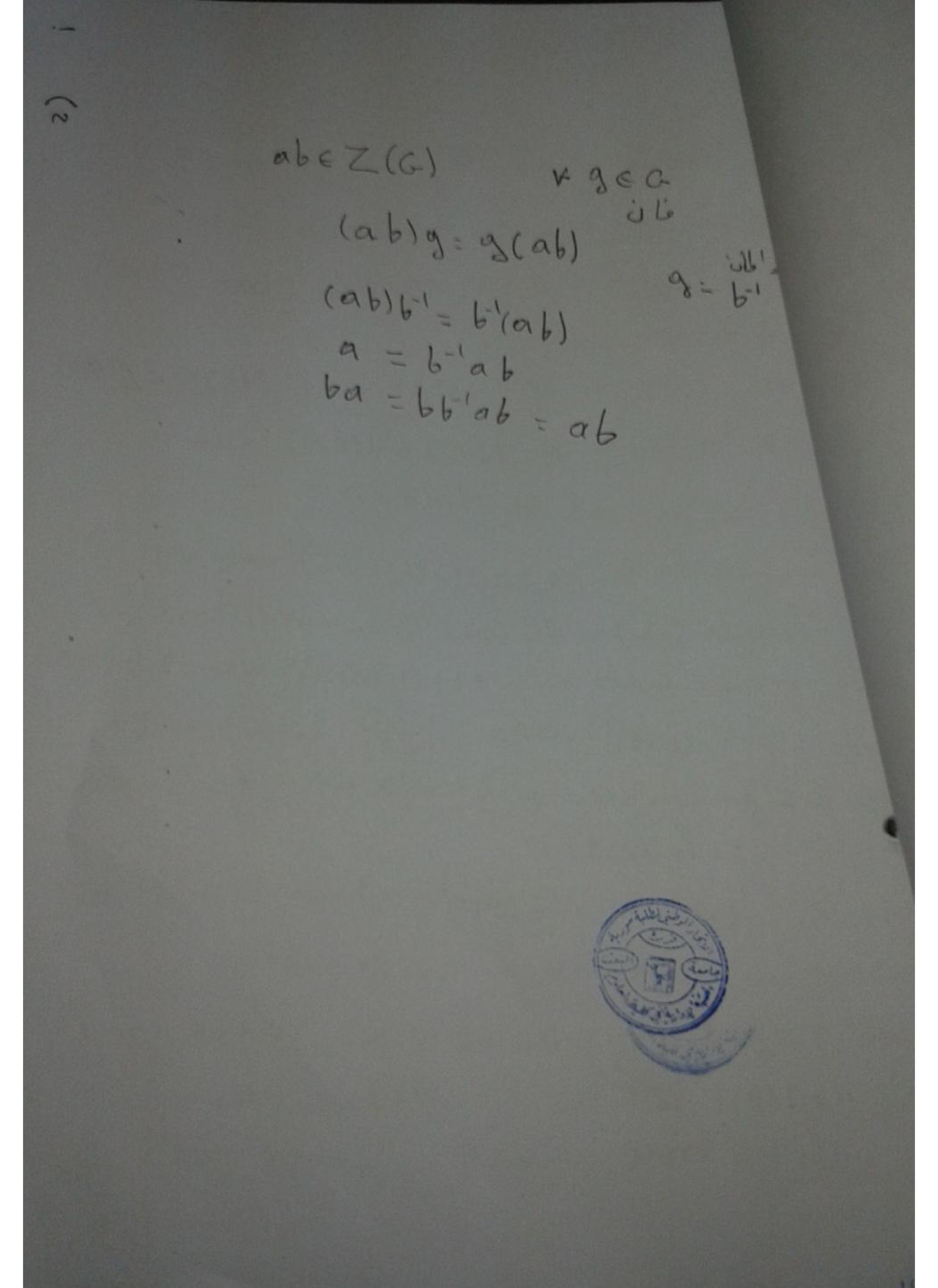
10- خطأ يساوي 10 (تم شرحه في تمرين سابق)

11- خطأ لأنه $\gcd(5,20) \neq 1$

12- خطأ يساوي 4

13. خطأ يساوي 12

14- صح



$ab \in Z(G)$ $\forall g \in G$ فان

$(ab)g = g(ab)$

الآن $g = b^{-1}$

$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$

$a = b^{-1}ab$

$ba = bb^{-1}ab = ab$

إن التطبيق $\Phi: \mathbb{Z} \to G$ غامر لأنه $\forall y \in G$ فإنه

يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث $y = a^m$ ومن ثم فإن $\varphi(m) = a^m = y$.

إلا أن φ متباين فرضاً فإن φ تقابل وبالتالي $\mathrm{card}\,\mathbb{Z} = \mathrm{card}\,G$

ومنه G غير منتهية.

بما أن $ab \in Z(G)$ فإنه $\forall g \in G$ فإن $(ab)g = g(ab)$

فإذا كان $g = b^{-1} \in G$ فإن $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$ ومنه

$$a = b^{-1}(ab) \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$$

4) حسب لاغرانج نجد $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$ وهنا نميز حالتين:

1- إذا كانت G تبديلية فإن $G = Z(G)$ ومنه $(Z(G):1) = pq$.

2) G ليست تبديلية عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$. لنفرض أن $(Z(G):1) = p$

عندئذ $(G/Z(G):1) = q$ وبالتالي $G/Z(G)$ دوارة وهذا يؤدي إلى

أن G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً وكذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$

ومنه $(Z(G):1) = 1$.

5) ليكن $x \in f^{-1}(g')$ عندئذ $f(x) = g' = f(g)$ ومنه $f(g^{-1}x) = e'$ $\Leftarrow$

$g^{-1}x \in \ker f$ ومنه $x \in g\ker f$ أي $f^{-1}(g') \subseteq g\ker f$.

ليكن $y \in g\ker f$ عندئذ $y = gx \in G$ حيث $x \in \ker f$ ومنه

$f(y) = f(g)f(x) = g'$ أي $y \in f^{-1}(g')$ وبالتالي

$g\ker f \subseteq f^{-1}(g')$. مما سبق نجد $f^{-1}(g') = g\ker f$.

٢٠١٦/ ٦/

ـب الثالث:

ـا ان كلاً من A, B ناظميه فان AB زمره جزئيه من G

ومن انه $\forall g \in G$ فان $g(AB)g^{-1} \subseteq AB$

ـن $y \in g(AB)g^{-1}$ عندئذ يوجد $a \in A, b \in B$ حيث

$y = g(ab)g^{-1} =$

$=(gag^{-1})(gbg^{-1}) \in A$ ومنه AB ناظميه في G.

2) لنفرض مرتبة G العدد الاولي P. ان $G \neq \langle e \rangle$ ومنه يوجد في G عنصر $a \neq e$. لنأخذ $\langle a \rangle$. بما ان $\langle e \rangle \neq \langle a \rangle$ فان $G = \langle a \rangle$ لانه بالحالة المعاكسه تكون مرتبة $\langle a \rangle$ تقسم مرتبة G حسب لاغرانج وهذا غير ممكن لان P عدد اولي ومنه $G = \langle a \rangle$.

3) G زمره و H جزئية من G. تكون H P-زمره جزئيه سيلوفيه من G ⟺ مرتبتها اكبر قوة لعدد الأولي P تقسم مرتبة الزمرة G. 2

دراسة الزمرة التي مرتبتها 40. ان $(G:1) = 2^3 \cdot 5$ حسب سيلوف الاولى 1

G تحوي 5-زمره جزئيه سيلوفيه مرتبتها 5 كما ان G تحوي 2-زمره جزئيه سيلوفيه مرتبتها 8. ان عدد جميع الـ 5-زمر الجزئيه السيلوفيه التي مرتبة كل منها 5 حسب سيلو الثالثه يعطى بالعلاقه $1+K5$ ونلاحظ من أجل $K \neq 0$ فان العدد $1+K5$ لايقسم 40 ومنه توجد 5-زمره جزئيه سيلوفيه واحدة فقط في G. لنرمز لها بـK وهي ناظمية. كما ان عدد جميع الـ2-زمر جزئيه سيلوفيه في G والتي مرتبة كل منها 8 اما 1 أو 5 لتكن H احداها. عندئذ KH زمره جزئيه من G وبما ان $H \subseteq KH$, K فان مرتبة KH يجب أن تقبل القسمة على 8, 5 حسب لاغرانج ومنه $(KH:1)=40$ اذاً $G = KH$

انتهت الأجوبة 17/ 12
د. إيمان الخوجه
تاريخ الامتحان 20/ 1/ 2015

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثالثة رياضيات

المدة: ساعة ونـ
العلامة: 100 در
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة {1, 2, 3} زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 5 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_5(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.

(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q^*, \cdot)$ غير منتهية كون Q^* زمرة غير منتهية.

(4) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(5) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولد واحد فقط.

(6) إذا كانت (G, .) زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^9 في G تساوي 0

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(11)$ يساوي 11 زمر جزئية.

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 5 .

(9) إذا كان $\varphi: Z_{30} \to Z_{30}$ تشاكلاً وكان $Ker\ \varphi = \{0, 10, 20\}$ و $\varphi(23) = 6$ فإن $\varphi^{-1}(6) = 23 \cdot ker\ \varphi$

(10) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 5

(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 20

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_4(20)$ يساوي 5

(13) رتبة العنصر (2 , 3) من الزمرة $Z_4 \oplus Z_9$ يساوي 6 .

(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(12)$

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن `G , G زمرتين ماء على صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $H = \{x: x \in G; x^2 = e\}$ هي زمرة جزئية من G

(2) إذا كانت $G = <a>$ دوارة وكان التطبيق $\varphi: Z \to G$ المعرف على النحو: $(n) = a^n$
متباينا فإن G تكون غير منتهية.

(3) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ حيث $Z(G)$ مركز الزمرة G، فإن $= b . a$

(4) إذا كانت G منتهية مرتبتها pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان ، فإن مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(5) إذا كان $f: G \to G^`$ تشاكلا زمريا و $g \in G$ حيث $f(g) = g^`$ ، فإن

$$f^{-1}(g^`) = \{x : x \in G, f(x) = g^`\} = g . Ker f$$

السؤال الثالث (28 درجة): لتكن $(G , .)$ زمرة ما و A, B زمرتين جزئيتين من G. أثبت

(1) إذا كانت كلا من الزمرتين A, B ناظمية في G، فإن الجداء $A \cdot B$ هو زمرة ناظمية فـ

(2) كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

(3) إذا كان p عدداً أولياً. عرف الـ P- زمرة جزئية سيلوفية في الزمرة G. ثم ادرس الزمر